Résumé 10(bis) : Réduction d'endomorphismes

EXERCICES :

CCP 74

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.
2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$, x, y, z désignant trois fonctions de la variable t, dérivables sur $\mathbb{R}$.
   En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

EXERCICES :

CCP 75 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
2. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.
   Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
   On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.
3. En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x - 4y \\ y' = x + 3y \end{cases}$.

EXERCICES :

CCP 44
Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : Une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer à l'aide d'un exemple que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

EXERCICES :

CCP-45
Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.
   (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
   On pose $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall t \in [0, 1]$, $d_A(tx + (1-t)y) \leqslant t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.
   Prouver que A est convexe.